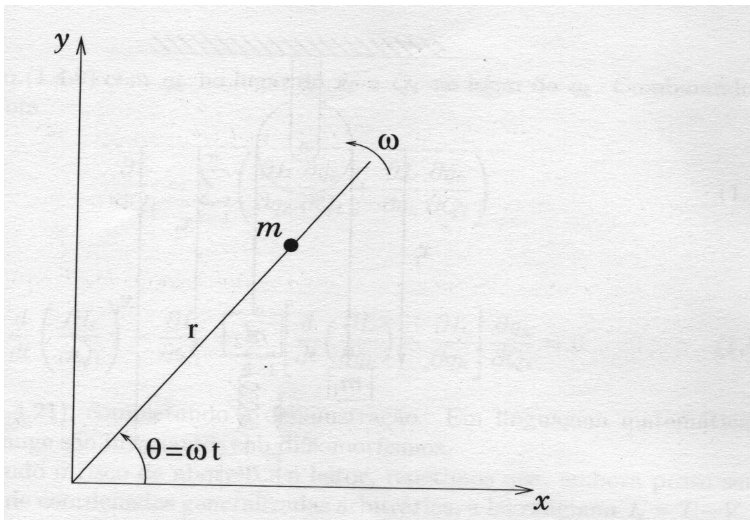
Exercícios de extensão dos conceitos vistos em aula

1. Considere o problema de uma conta que desliza sem atrito ao longo de uma haste retilínea que gira com velocidade angular constante ω num plano horizontal (figura 1). Obtenha a lagrangiana da conta e as equações de movimento. Faça uma integração explícita das equações de movimento e grafique a trajetória da partícula no plano xy.



7: Conta deslizando ao longo de uma haste horizontal girante.

2. Considere o potencial generalizado para uma partícula de carga e em um campo eletromagnético: $U = e\phi - \frac{e}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}$, onde $\phi(\vec{x},t)$ é o potencial escalar do campo eletromagnético, $\vec{A}(\vec{x},t)$ é o potencial vetorial e $\vec{v}$ é a velocidade da partícula. Partindo deste potencial mostre que a força correspondente é a força de Lorentz: $\vec{F} = e(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B})$, onde $\vec{E}(\vec{x},t)$ e $\vec{B}(\vec{x},t)$ são o campo elétrico e o campo magnético, respectivamente.

3. Uma extensão da "função de dissipação" de Rayleigh ao caso de forças dissipativas não proporcionais à velocidade é discutida no artigo de E. Minguzzi, *Rayleigh dissipation function at work*, que se encontra na web em arXiv.org, referência arXiv:1409.4041, ou European Journal of Physics 36 (2015), 035014. Leia o artigo e descreva, resumidamente, os principais resultados no contexto do visto em sala de aula.

4. O "Teorema de Bertrand" afirma que os únicos potenciais centrais para os quais todas as órbitas limitadas são fechadas são o potencial gravitacional $V(r) = -\kappa/r$ e o "potencial elástico" $V(r) = \alpha\, r^2$, onde κ e α são constantes reais positivas. Escreva a lagrangiana

para uma partícula sujeita a um potencial elástico em três dimensões espaciais, determine a equações de movimento e a equação da trajetória. Analise a possibilidade de integrar a equação da trajetória e discuta o tipo de soluções (órbitas) possíveis para este potencial.

5. Considere uma partícula movendo-se livremente no plano xy, exceto pelo vínculo não-holônomo:
$$\dot{x} - \omega y = 0,$$
onde ω é uma constante.
    - Encontre a solução geral das equações de movimento do sistema usando o método dos multiplicadores de Lagrange.
    - Prove que o vínculo é não-holônomo.

6. Considere uma partícula movendo-se livremente no plano xy, exceto pelo vínculo não-holônomo:
$$\dot{x} - \omega y = 0,$$
onde ω é uma constante.
    - Encontre a solução geral das equações de movimento do sistema usando o método dos multiplicadores de Lagrange e identifique as forças de vínculo.
    - Resolva a equações de Newton para o sistema sujeito as forças de vínculo encontradas no item anterior. A solução encontrada satisfaz automaticamente o vínculo não-holônomo ? Em que condições o vínculo é obedecido durante todo o movimento?

7. O Princípio de D'Alembert permite obter as equações de Lagrange a partir do princípio dos trabalhos virtuais, considerando deslocamentos virtuais infinitesimais. No artigo *Formulação geométrica do Princípio de D'Alembert*, publicado na Revista Brasileira de Ensino de Física 27, 483 (2005), Nivaldo Lemos apresenta uma formulação geométrica do mesmo, sem recorrer a deslocamentos infinitesimais. Faça uma comparação de ambas as formulações e descreva o que você considera serem vantagens e desvantagens em ambos casos.

8. Leia o artigo *Sutilezas dos vínculos não-holônomos*, Rev. Bras. Ens. Fís. 28, 25 (2003), onde Nivaldo Lemos analiza propriedades e comportamentos em presença de vínculos não-holônomos. Discuta como levar em conta este tipo de vínculos sem recorrer ao método dos multiplicadores de Lagrange. Em particular, discuta a forma das equações de movimento (chamadas equações de Voronec) quando as equações de vínculo são funções lineares e homogêneas das velocidades generalizadas.

9. Discuta a aplicação do Teorema de Noether para sistemas não-conservativos, segundo o artigo *Symmetries, Noether's theorem and inequivalent Lagrangians applied to nonconservative systems*, N. Lemos, Revista Mexicana de Física 39, 304 (1993). Em particular, analise os casos onde é possível uma abordagem do problema considerando lagrangianas não equivalentes, como é o caso do oscilador harmônico amortecido.